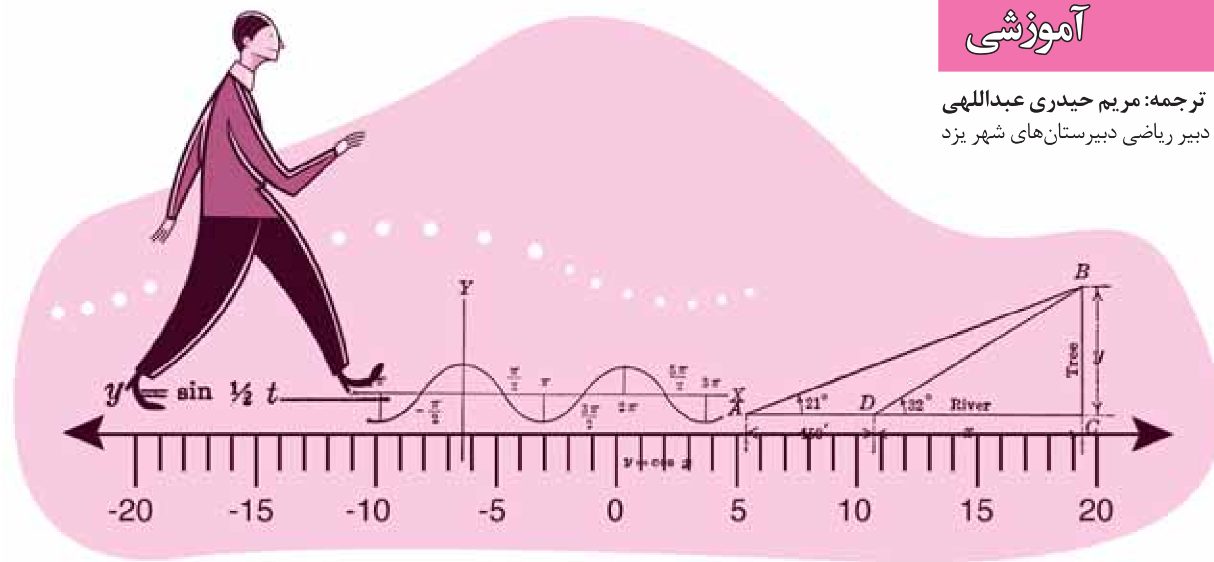
ترجمه: مریم حیدری عبداللهی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهر یزد



گذر از سختی‌ها، خطاها و شکست‌ها و رسیدن به موفقیت

چکیده

در این مقاله با حل سه نمونه از مسائل ریاضی می‌بینیم که چه‌طور می‌توان با شرایط پیش‌آمده در حل مسئله برخورد کرد و با تغییر و اصلاح راه‌حل، در مواجهه با اشتباهات و مشکلات پیروز میدان بود.

کلیدواژه‌ها: دنباله حسابی، می‌نیمم تابع

حالت اول: حل مجدد و دور زدن مشکل

مثال ۱. مقدار عددی عبارت $\frac{\cos ۲۰}{۲\sin ۸۰-\sin ۲۰}$ را بیابید.

حل: راه معمولی که به ذهن اکثر دانش‌آموزان می‌رسد به‌صورت زیر است:

$$\frac{\cos ۲۰}{۲\sin ۸۰-\sin ۲۰}=\frac{\cos ۲۰}{۲\cos ۱۰-\sin ۲۰}=\frac{\cos ۲۰}{۲\cos ۱۰-۲\sin ۱۰\cos ۱۰}$$
$$=\frac{\cos ۲۰}{۲\cos ۱۰(۱-\sin ۱۰)}$$

و در اینجا می‌بینیم که پیدا کردن مقدار این عبارت نیز بسیار مشکل است.

حالا دوباره به اعداد موجود در صورت مسئله نگاه می‌کنیم و به دنبال راه‌حل دیگری می‌گردیم. می‌دانیم که:

$$\sin ۸۰=\sin(۶۰+۲۰)=\sin ۶۰\cos ۲۰+\cos ۶۰\sin ۲۰$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{\cos ۲۰}{۲\sin ۸۰-\sin ۲۰}=\frac{\cos ۲۰}{۲\sin ۶۰\cos ۲۰+۲\cos ۶۰\sin ۲۰-\sin ۲۰}$$
$$=\frac{\cos ۲۰}{\sqrt{۳}\cos ۲۰+\sin ۲۰-\sin ۲۰}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

البته در راه‌حل اول نیز هیچ اشتباهی انجام نداده‌ایم. پس بالاخره بعد از قدری کلنجار رفتن با مسئله می‌توان به جواب نهایی دست پیدا کرد.

حالت دوم: کشف و اصلاح اشتباهات

مثال ۲. فرض کنید S_n و S'_n به ترتیب مجموع n جملهٔ اول دنباله‌های حسابی $\{a_n\}$ و $\{a'_n\}$ باشد و تساوی $\frac{S_n}{S'_n}=\frac{۲n+۳}{۳n+۲}$ برای هر $n\geq ۱$ برقرار باشد. مقدار $\frac{a_n}{a'_n}$ را پیدا کنید.

حل: بیشتر دانش‌آموزان این راه‌حل را ارائه می‌دهند: می‌دانیم که $\frac{S_n}{S'_n}=\frac{۲n+۳}{۳n+۲}$ پس فرض می‌کنیم که: $S_n=k(۲n+۳)$ و $S'_n=k(۳n+۲)$. بنابراین:

$a_n=S_n-S_{n-۱}=k(۲n+۳)-k(۲(n-۱)+۳)=۲k$

$a'_n=S'_n-S'_{n-۱}=k(۳n+۲)-k(۳(n-۱)+۲)=۳k$

بنابراین: $\frac{a_n}{a'_n}=\frac{۲k}{۳k}=\frac{۲}{۳}$.

این راه‌حل بدون اشـــکال به‌نظر می‌رســـد، ولی در آن از شـــرایط حســـابی بودن دنباله‌ها استفاده نشـــد. بنابراین ممکن است این شرط اضافه و غیرضروری باشـــد. برای اطمینان جواب را برای $n=۱$ امتحان می‌کنیم.

$$\frac{a_۱}{a'_۱}=\frac{۲}{۳}=\frac{S_۱}{S'_۱}$$

از طـــرف دیگـــر، طبـــق فرض: $\frac{S_۱}{S'_۱}=\frac{۲\times۱+۳}{۳\times۱+۲}=\frac{۱}{۱}$ و مـــا به یک تناقض رسیدیم. حال ببینیم اشکال کجاست. اگر تمام اجزای راه‌حل را با دقت بررسی کنیم، اشکالی در اعمال انجام شده نمی‌یابیم. پس باید مشـــکل در این فرض باشد که گفتیم: $S_n=k(۲n+۳)$ و $S'_n=k(۳n+۲)$.

اگـــر فرمـــول مجمـــوع n جملـــهٔ اول دنبالـــهٔ حســـابی را نـــگاه کنیم ($S_n=\frac{n(۲a+(n-۱)d)}{۲}$)، می‌بینیم که S_n تابعی خطی از n نیست، بلکه تابعی درجهٔ دوم اســـت. بنابراین اشـــتباه ما این بود که S_n و S'_n را توابعی خطی فرض کردیم. حال با توجه به این شـــرایط مسئله فرض می‌کنیم که:

$S'_n=(kn+b)(۳n+۲)$, $S_n=(kn+b)(۲n+۳)$

که در آن k و b ثابت هستند. پس:

$a_n=S_n-S_{n-۱}=k(۴n+۱)+۲b$

$a'_n=S'_n-S'_{n-۱}=k(۶n-۱)+۳b$

و در نتیجه:

$$\frac{a_n}{a'_n}=\frac{k(۴n+۱)+۲b}{k(۶n-۱)+۳b}$$

حال بایـــد k و b را پیدا کنیم. اگر خوب به فرمول S_n دقت کنیم، می‌بینیم که نه‌تنها تابعی درجهٔ دوم اســـت، بلکه از مبدأ مختصات نیز می‌گذرد. بـــا جای‌گـــذاری مبـــدأ در $S_n=(kn+b)(۲n+۳)$ مقدار $b=۰$ به‌دست می‌آید و در نتیجه:

$$\frac{a_n}{a'_n}=\frac{k(۴n+۱)}{k(۶n-۱)}=\frac{۴n+۱}{۶n-۱}$$

البته می‌توان مســـئله را به کمک فرمول کلی a_n و S_n طوری حل کرد که نیازی به فرض $S_n=k(۲n+۳)$ و $S'_n=k(۳n+۲)$ هم نباشد.

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{۲a_۱+(n-۱)d}{۲a'_۱+(n-۱)d'}\Rightarrow\frac{a_۱}{a'_۱}=\frac{S_۱}{S'_۱}=\frac{۱}{۱},\ \frac{S_۲}{S'_۲}=\frac{۲a_۱+d}{۲a'_۱+d'}=\frac{۷}{۸},$$
$$\frac{S_۳}{S'_۳}=\frac{a_۱+d}{a'_۱+d'}=\frac{۹}{۱۱}$$

و با حل این سه معادله عبارات زیر به دست می‌آید:

$$a_۱=a'_۱=\frac{۵}{۴}d,\ d'=\frac{۳}{۲}d$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{a_n}{a'_n}=\frac{a_۱+(n-۱)d}{a'_۱+(n-۱)d'}=\frac{\frac{۵}{۴}d+(n-۱)d}{\frac{۵}{۴}d+(n-۱)\frac{۳}{۲}d}=\frac{۴n+۱}{۶n-۱}$$

روش دوم را بـــرای ایـــن گفتیـــم که بـــرای مثال‌هایـــی در زمینهٔ دنباله‌های هندسی نیز روش مناسبی است.

حالت سوم: از شکست به پیروزی

مثال ۳. مینی‌مم تابع $y=\frac{x^۲+a+۱}{\sqrt{x^۲+a}}, a>۱$ را پیدا کنید.

حل: با تفکیک صورت کسر داریم:

$$y=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+a}}+\sqrt{x^۲+a}\ge ۲\frac{۱}{\sqrt{x^۲+a}}\sqrt{x^۲+a}=۲$$

بنابراین مینی‌مم تابع برابر ۲ اســـت. اما می‌دانیم که تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که:

$$\frac{۱}{\sqrt{x^۲+a}}=\sqrt{x^۲+a}\Rightarrow x^۲+a=۱\Rightarrow x^۲=۱-a$$
$$\Rightarrow ۱-a>۰\Rightarrow a<۱$$

و این با فرض مسئله در تناقض است و مینی‌مم نمی‌تواند ۲ باشد. در این راه‌حل هیچ اشتباهی وجود ندارد فقط، راه‌حل ما را به جواب نمی‌رساند. یکی از چندین راه رسیدن به جواب استفاده از مشتق است.

$$y'=\frac{x(x^۲+a-۱)}{(x^۲+a)\sqrt{x^۲+a}}$$

شرایط $a>۱$ ایجاب می‌کند که: $x^۲+a-۱>۰$. پس اگر $x\ge۰$، آن‌گاه $y'\ge۰$ و تابع در این بازه صعودی اســـت و اگر $x<۰$، آن‌گاه $y'<۰$ و در نتیجه در این بازه نزولی اســـت. اما تابع در $x=۰$ پیوســـته اســـت، پس مینی‌مم تابع در $x=۰$ اتفاق می‌افتد و $y(۰)=\frac{۰^۲+a+۱}{\sqrt{۰^۲+a}}=\frac{(a+۱)\sqrt{a}}{a}$ مینی‌مم تابع است.

*منبع

Pi in the Sky- Issue 15 2011 from Difficults, Mistakes, and Failures to Success Luo Qi